Задавальник на канікули!

Формула Піка

Формула Піка (або теорема Піка) Даний многокутник(не обов'язково випуклий) з цілочисловими координатами (або що те ж саме, многокутник, який намальований на клітчатому листочку бумаги, у якого вершини це вузли клітчатої сітки), тоді його площу можна знайти за формулою:

$S = B + \frac{Г}{2} - 1$, де B - кількість цілочислових точок(або що те ж саме, вузли сітки) всередині многокутника; $Г$ - кількість цілочисельних точок на границі многокутника (квадратик 1х1 має площу 1) .

1. Доведіть, що трикутник з вершинами у вузлах сітки, який не має вузлів всередині і на сторонах (не враховуючи вершин) має площу 1:
   а) доведіть це для трикутника у якого одна зі сторін лежить на лініях сітки (ті хто були на гуртку пригадайте доведення);
   б) доведіть це для трикутника у якого жодна зі сторін не належить лініям сітки.
   Підказка до пункту б): [redacted] (щоб прочитати підказку треба перефарбувати текст).
2. Длведіть формулу Піка.
3. На площині дана клякса площі більшої за 1. Доведіть, що у якихось двух її точках різниці відповідних координат цілі.(клякса це будь-що на площині, навіть не обов'язково зв'язне)
4. (Теорема Мінковського) На площині дана центрально-симетрична(відносно вузла) випукла фігура площі більшої 4. Доведіть, що вона містить більше одного вузла.
5. (Теорема Холла) Є дві множини дівчат і хлопчиків. Деякі хлопчики і дівчата знають один одного. Нехай хлопчиків n і дівчат m, де m>n. Ми хочемо кожному хлопчику поставити в пару дівчинку так, щоб вони знали один одного і ніяка дівчинка не була в парі з двома хлопчиками одночасно. Доведіть, що це можливо зробити тоді і тільки тоді, коли виконується така умова: будь-які k хлопчиків знають щонаймеше k дівчат.
6. Нехай n і m – такі цілі числа, що $m^2 + 9mn + n^2 \vdots 11$. Доведіть, що $m^2 - n^2 \vdots 11$.

7. Доведіть, що не існує дійсних чисел(якщо хтось не знає, що таке дійсні числа, вважайте їх будь-якими числами якими ви можете їх собі уявити) a і b таких, що одночасно виконуються дві рівності: $a = b^2 + 1$ та $b = a^2 + 1$.
8. Дано множину з 2n додатних чисел, про які відомо: ці числа можна розбити на n пар таким чином, що сума чисел у кожній парі буде одна й та сама; ці 2n чисел можна розбити на n пар (можливо, вже інших) так, щоб добуток чисел у клжній парі буде одним і тим самим. Доведіть, що серед чисел цієї множини не знайдеться трьох різних.
9. Двоє грають у подвійні шахи, тобто всі фігури ходять як і в звичайних шахах, але кожен із шахістів робить по два ходи підряд. Доведіть, що шахіст, який грає білими фігурами, може грати так , щоб не програти.
10. Натуральні числа a і b такі, що $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ - ціле. Нехай c – найбільший спільний дільник чисел a і b. Доведіть, що $c^2 \le a + b$.
11. Квадрат розмірами 7х7 розрізали на фігурки трьох типів: квадрат 2х2, куточок(3 клітинки), Z тетраміно(4 клітинки, в тетрісі є така схожа на Z). Доведіть, що серед одержаних фігурок є принаймні одна фігурка з чотирьох клітинок.
12. Знайдіть всі натуральні числа m і n, що задовольняють рівність $5n^2 = m! - n!$.
13. Нехай AE – бісектриса трикутника ABC, а точка D належить його стороні AC, причому $\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA$. Доведіть, що DE – бісектриса кута BDC.
14. Відомо, що для даних цілих чисел a, b, c число $a^2 + b^2 + c^2$ ділиться на 6, а число $ab + bc + ac$ ділиться на 3. Доведіть, що $a^3 + b^3 + c^3$ ділиться на 6.
15. Дошку розміром 8х8 з «традиційним» шаховим розфарбуванням довільно розділено на 32 двоклітинкових прямокутники – «пластинки доміно». Горизонтально розташована пластинка називається чорно-білою, якщо її ліва клітинка чорна, і біло-чорною – в іншому випадку. Доведіть, що кількість чорно-білих і біло-чорних горизонтальних пластинок доміно завжди збігається.
16. Дано смужку розміром 1х17, клітинки якої зліва направо пронумеровано послідовними числами від 1 до 17. Двоє учнів грають у таку гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні, серед яких ліва має парний номер. Переможеним вважатиметься той хто не може зробити хід. Хто може забез печити собі виграшну стратегію і вкажіть її.

17. Через точки дотику вписаного у трикутник кола зі сторонами цього трикутника провели прямі, що відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів трикутника. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

18. На дошці з клітинками розмірами 4х4 двоє учнів грають у гру. Вони ходять по черзі, і кожен гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку, яку можна зафарбувати лише один раз. Переможеним вважатиметься той гравець, після ходу якого утвориться квадрат розмірами 2х2, що складатиметься із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

19. Знайдіть принаймні дві пари натуральних чисел (a, b), що задовольняють рівняння $1990a^{1999} = b^{2000}$.

20. Дано чотирикутник ABCD, у якому $AB \parallel CD,\ AB > CD$. Відомо, що в цьому чотирикутнику відстань між серединами паралельних сторін AB і CD , дорівнює відстані між серединами діагоналей. Доведіть, що кут ADB – тупий.

21. Чи існують цілі числа m, n такі, що $7m^2 - 5n^2 = 2000$.

22. Микола та Сергійко грають у гру, по черзі записують цілі числа в клітинки таблиці розмірами 7х9 (7 рядків, 9 стовпчиків). Першим робить свій хід Миколка. За один хід записується одне число у вільну клітинку. Гра продовжується , поки вони не заповнять числами всю таблицю. Потім підраховуються значення $s_1, s_2, .., s_7$ - суми чисел у рядках таблиці. Якщо серед чисел $s_1, s_2, .., s_7$ парних більше, ніж непарних, виграє Миколка. В іншому випадку – Сергійко. Хто з гравців може забезпечити собі виграш.

23. Про ціле число n та просте число p відомо, що числа 5n-1 та n-10 діляться на p. Доведіть, що число 2000n+13 також ділиться на p.

24. У ряд виписані послідовні натуральні числа 1 до 2000. Двоє по черзі вписують між цими числами знак додавання або множення (усього вписано 1999). Якщо кінцеве значення одержаного виразу ділитиметься на 3, то виграє той, хто ходив першим. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Знайдіть для нього виграшну стратегію.

25. Множина X складається з 6 елементів. Нехай $A_1, A_2, .., A_9$ - такі підиножини X, що кожна з них містить по 3 елементи. Доведіть, що існує таке «пофарбування» елементів X у два кольори, що кожна множина

A_i $(1 \le i \le 9)$ буде містити принаймні два різнокольорових елементи.